Ejercicios Electrodinámica Cuántica. Capítulo 4

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

3 de abril de 2023

1. Calcular j_A^0.

Sea el Lagrangiano de QED

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi,$$

este Lagrangiano es invariante bajo transformaciones de Lorentz, queremos calcular la corriente conservada según el Teorema de Noether bajo una rotación infinitesimal. Dicha corriente se puede escribir como

$$j^0 = j_\psi^0 + j_{\bar{\psi}}^0 + j_A^0$$

El primer término ya lo ha calculado Javier en el capítulo 4, el segundo se anula, por lo que solo queda calcular el tercer término

$$j_A^0 = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{QED}}}{\partial(\partial_0 A^\mu)}\delta A^\mu - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{QED}}}{\partial(\partial_0 A^\mu)}\partial_\nu A^\mu \delta x^\nu - \mathcal{L}_{\text{QED}}\delta x^0\right) \tag{1}$$

Para hacer este cálculo primero vamos a calcular

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{QED}}}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} &= \frac{-1}{4}\frac{\partial(F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta})}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} = \frac{-1}{2}F_{\alpha\beta}\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} = \frac{-1}{2}F_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial(\partial^\alpha A^\beta)}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} - \frac{\partial(\partial^\beta A^\alpha)}{\partial(\partial^\nu A^\mu)}\right)\\ &= \frac{-1}{2}F_{\alpha\beta}\left(\delta_\nu^\alpha\delta_\mu^\beta - \delta_\nu^\beta\delta_\mu^\alpha\right) = F_{\mu\nu}\end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (1) obtenemos

$$j_A^0 = F_{\mu 0}\delta A^\mu - \left(F_{\mu 0}\partial_\nu A^\mu \delta x^\nu - \mathcal{L}_{\text{QED}}\delta x^0\right) = F_{i0}\delta A^i - \left(F_{i0}\partial_\nu A^i \delta x^\nu - \mathcal{L}_{\text{QED}}\delta x^0\right)$$

Donde hemos usado que $F_{00} = 0$. Usando ahora que las rotaciones no afectan al tiempo y, por tanto $\delta A^0 = \delta x^0 = 0$ la ecuación queda

$$j_A^0 = F_{i0}\delta A^i - F_{i0}\partial_j A^i \delta x^j$$

Sabemos que, bajo rotaciones, los vectores transforman como $\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu$, sustituyendo en la ecuación nos queda

$$j_A^0 = F_{i0}\omega^i{}_j A^j - F_{i0}\partial_j A^i \omega^j{}_k x^k = F_{0i}\omega_{ij}A^j - F_{0i}\partial_l A^i \omega_{lk}x^k = E^i\left(\omega_{ij} + \delta_{ij}\omega_{kl}x^k\partial_l\right)A^j$$

Donde he sustituido $F^{i0} = E^i$ tal como indica la fórmula 62.1 del formulario. Ahora podemos usar la siguiente propiedad para escribir ω_{ij} en función del vector $\vec{\omega}$;

$$\omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega^k$$

$$j_A^0 = E^i\left(\varepsilon_{ijk}\omega^k + \delta_{ij}\varepsilon_{klm}\omega^m x^k\partial_l\right)A^j = E^i\omega^k\left(\varepsilon_{ijk} + \delta_{ij}\varepsilon_{kml}x^m\partial_l\right)A^j$$

Ahora, podemos reconocer los siguientes términos

$$(J^k)^i{}_j = \frac{i}{2}\varepsilon_{klm}(M^{lm})^i{}_j = \frac{i}{2}\varepsilon_{klm}\left(g^{li}\delta_j^m - g^{mi}\delta_j^l\right) = \frac{i}{2}\left(-\varepsilon_{kij} + \varepsilon_{kji}\right) = -i\varepsilon_{ijk}$$

$$L^i = -i\varepsilon_{ijk}x^j\partial_k$$

por lo que el resultado final queda

$$j_A^0 = iE^i\omega^k\left((J^k)^i{}_j + \delta_j^i L^k\right)A^j$$